数理解析研究所講究録
1506 巻 2006 年 91-114

Some tests for the Poisson distribution

筑波大・数理物質　福田　望 (Nozomu Fukuda)
Graduate School of Pure and Applied Science
University of Tsukuba
筑波大・数理物質　赤平　昌文 (Masafumi Akahira)
Graduate School of Pure and Applied Science
University of Tsukuba

1 はじめに

標本が, 同じ離散型母集団分布から得られたものであるか否かを検証するために, 様々な検定方法が提案されている. 最近, Brown and Zhao [BZ02] は, 複数の確率変数が独立にそれぞれのポアソン分布に従い, それらの母数がすべて等しいか否かという仮説検定問題において, Anscombe の分散安定変換 ([A48]) に基づく統計量によって有用な検定ができることを主張している. しかし, Anscombe の分散安定変換は母数 λ が十分大きいときに有用な方法であり, また, 標本が離散的な値をとるにも関わらず, その漸近分布をカイ 2 乗分布に近似させていることから, その精度が標本の大きさに著しく影響する. 本論では, Anscombe の分散安定変換に基づく検定を含む従来の検定を紹介した上で, より簡便なマックス検定統計量によるランダム検定を考え, また, Anscombe の分散安定変換に基づく検定等と近似マックス検定の水準の達成精度および検出力を数値的に比較する.

2 設定

確率変数 $X_1, \cdots, X_n$ をたがいに独立とし, 各 X_i がポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda_i)$ $(\lambda_i > 0)$ に従うとする. いま, これらのポアソン分布の母数がすべて等しいか, 否かに興味があるとして, 帰無仮説 $H : \lambda_1 = \cdots = \lambda_n$ に対して対立仮説 $K : \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i - \bar{\lambda})^2 > 0$ を有意水準 α $(0 < \alpha < 1)$ で検定する仮説検定問題について考える. ただし, $\bar{\lambda} = (1/n)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ とする. このような仮説検定問題に用いられる検定統計量として, Anscombe の分散安定変換に基づく統計量, 尤度比統計量, 条件付きカイ 2 乗 (χ^2) 統計量, Neyman-Scott 統計量等が挙げられる.

2.1 Anscombe の分散安定化に基づく統計量による検定

確率変数 X がポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ に従うとき, その平均と分散はいずれも λ になる. すなわち, 分散が平均に依存する. よって, ポアソン分布の平均を比較する際, 変数 X を適当に変換し, その分散が平均に依らないようにすることが望ましい. このような変換のことを, **分散の安定化** (variance stabilization) と呼ぶが, ポアソン分布の場合, 分散が全く平均に依存しない変換は存在しない. ただ, 平均が十分大きいときに分散が漸近的に平均に依らないような変換が存在する. まず, 分散の安定化の一例として, Anscombe による分散安定化について考える ([TF81]). 次の定理 2.1, 2.2 はよく知られている.

定理 2.1 (ポアソン分布の正規近似). 確率変数 X がポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従うとする. いま母数 λ が十分大きいとき, 確率変数 $(X-\lambda)/\sqrt{\lambda}$ は, 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数に法則収束する.

証明は省略. 定理 2.1 から, 確率変数 X がポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従い, なおかつ母数 λ が十分大きいとき, $(X-\lambda)$ は漸近的に正規分布 $N(0,\lambda)$ に従うと見なすことができる.

定理 2.2 (デルタ法). $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$ を確率変数列とし, $(X_n-\theta)$ が $n\to\infty$ のとき $N(0,\{\sigma(\theta)\}^2)$ に従う確率変数に法則収束するとし, 記号で

$$X_n-\theta \xrightarrow{L} N\left(0,\{\sigma(\theta)\}^2\right) \qquad (n\to\infty)$$

と表す. また, g を $\mathbb{R}^1$ 上で定義された 1 回微分可能で, $x=\theta$ において $g'(x)$ が連続である関数とする. このとき

$$g(X_n)-g(\theta) \xrightarrow{L} N\left(0,\{g'(\theta)\sigma(\theta)\}^2\right) \qquad (n\to\infty)$$

が成り立つ.

証明は省略. ここで, 関数 g として,

$$g'(\theta)\sigma(\theta)=c \tag{2.1}$$

になる g を選べば, $g(X_n)$ の分布の漸近分散は平均 θ と無関係になる. ただし, $c>0$ は定数とする. いま, $\sigma(\theta)\neq 0$ であるから, (2.1) の両辺を $\sigma(\theta)$ で除し, 両辺を θ について積分すれば

$$g(\theta)=c\int\frac{1}{\sigma(\theta)}d\theta$$

になる.

特に, ポアソン分布の場合, $\sigma(\lambda)=\sqrt{\lambda}$ であるから,

$$g(\lambda)=c\int\frac{1}{\sqrt{\lambda}}d\lambda=2c\sqrt{\lambda}$$

になる. ここで, $c=1$ とすれば, $g(\lambda)=2\sqrt{\lambda}$ となり, $g(X)=2\sqrt{X}$ という変換が得られる. この変換による分布は漸近分散が 1 であり, ポアソン分布の正規近似よりも速く標準正規分布 $N(0,1)$ に収束することが知られている.

いま, $a\geq 0$ を定数とし,

$$Y_a:=2\sqrt{X+a}$$

という変換を考える. ここで, $T:=X-\lambda$, $\lambda':=\lambda+a$ とおけば,

$$\begin{aligned}
Y_a&=2\sqrt{X+a}=2\sqrt{T+\lambda'}\\
&=2\sqrt{\lambda'}\left\{1+\frac{T}{2\lambda'}-\frac{T^2}{8\lambda'^2}+\frac{T^3}{16\lambda'^3}-\frac{5T^4}{128\lambda'^4}+\cdots\right\}
\end{aligned}$$

になる. いま,

$$E(T)=0,\quad E(T^2)=\lambda,\quad E(T^3)=\lambda,\quad E(T^4)=\lambda+3\lambda^2$$

であるから,

$$E(Y_a) = 2\sqrt{\lambda'}\left\{1 - \frac{\lambda}{8\lambda'^2} + \frac{\lambda}{16\lambda'^3} - \frac{5(\lambda+3\lambda^2)}{128\lambda'^4} + \cdots\right\} \tag{2.2}$$

になる．よって, Y_a の分散は,

$$V(Y_a) = 1 + \frac{3-8a}{8\lambda} + O\left(\lambda^{-2}\right)$$

となる．ここで, $a = 3/8$ とおけば,

$$V(Y_a) = 1 + O\left(\lambda^{-2}\right)$$

となり, $a = 0$ とした変換よりも速く分散が 1 に収束する．また, $Y_a = 2\sqrt{X + (3/8)}$ の平均は (2.2) より,

$$E(Y_a) = 2\sqrt{\lambda + \frac{1}{8}} + O\left(\lambda^{-3/2}\right) \tag{2.3}$$

になる．従って, 確率変数 X がポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従うとき, $2\sqrt{X+(3/8)}$ は漸近的に平均 $2\sqrt{\lambda+(1/8)}$, 分散 1 の正規分布に従う．この変換が Anscombe [A48] によるものである．

Anscombe の分散安定変換に基づき, $Y_i := \sqrt{X_i + (3/8)}$ $(i = 1, \cdots, n)$ とおく．このとき, 仮説 H の下で $2Y_1, \cdots, 2Y_n$ はたがいに独立に, いずれも正規分布 $N(2\nu(\lambda), 1)$ に漸近的に従うので,

$$T_{ANS} := 4\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$$

は, λ が十分大きいとき, 自由度 $(n-1)$ のカイ 2 乗分布に漸近的に従う．ただし, $\lambda := \lambda_1 = \cdots = \lambda_n$ とし, $\nu(\lambda)$ は確率変数 X がポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ に従うときの $\sqrt{X+(3/8)}$ の平均, すなわち, $\nu(\lambda) := E(\sqrt{X+(3/8)})$ とする．よって, 十分大きい λ について $T_{ANS} > \chi^2_{n-1}(\alpha)$ であるとき, 帰無仮説 H を棄却する．ただし, $\chi^2_{n-1}(\alpha)$ は自由度 $(n-1)$ のカイ 2 乗分布における上側 $100\alpha\%$ 点とする．

一方, 対立仮説 K の下で $2Y_1, \cdots, 2Y_n$ はたがいに独立に, 各 $2Y_i$ はそれぞれ正規分布 $N(2\nu(\lambda_i), 1)$ に漸近的に従うので, T_{ANS} は自由度 $(n-1)$, 非心度 $(4\sum_{i=1}^{n}(\nu(\lambda_i) - \bar{\nu}_n)^2)$ の非心カイ 2 乗分布に漸近的に従う．ただし, $\nu(\lambda_i) := E_{\lambda_i}(Y_i) = E_{\lambda_i}(\sqrt{X_i + (3/8)})$, $\bar{\nu}_n := (1/n)\sum_{i=1}^{n}\nu(\lambda_i)$ とする．

Anscombe の分散安定変換は, 十分大きな λ について考えたが, それほど大きくない λ であっても妥当になることが経験的に知られている．

2.2 尤度比検定

確率変数 $X_1, \cdots, X_n$ はたがいに独立に, 各 X_i がポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda_i)$ に従うとき, その同時確率量関数 (j.p.m.f.) は,

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\lambda}) = \prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\lambda_i}\lambda_i^{x_i}}{x_i!}$$

になる．ただし，$\boldsymbol{X} := (X_1, \cdots, X_n)$, $\boldsymbol{x} := (x_1, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ とする．ここで，$\Theta_0 := \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n); \lambda_i \equiv \lambda\ (i = 1, 2, \cdots, n)\}$, $\Theta := \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n); \lambda_i > 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)\}$ とおくと，Θ_0, Θ の下での尤度関数はそれぞれ $L_{\Theta_0}(\boldsymbol{\lambda}_0) := f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\lambda}_0)$, $L_\Theta(\boldsymbol{\lambda}) := f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\lambda})$ であるから，対数尤度関数はそれぞれ

$$l_{\Theta_0}(\boldsymbol{\lambda}_0) = \sum_{i=1}^n (-\lambda + x_i \log \lambda - \log x_i!), \qquad l_\Theta(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^n (-\lambda_i + x_i \log \lambda_i - \log x_i!)$$

になる．ただし，$\boldsymbol{\lambda}_0 := (\lambda, \cdots, \lambda)$ とする．ここで，$(\partial/\partial\boldsymbol{\lambda}) l_{\Theta_0}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_0) = 0$, $(\partial/\partial\boldsymbol{\lambda}) l_\Theta(\hat{\boldsymbol{\lambda}}) = 0$ を満たす $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_0, \hat{\boldsymbol{\lambda}}$ を求めると，

$$\hat{\lambda}_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}, \qquad \hat{\boldsymbol{\lambda}} = (X_1, \cdots, X_n)$$

になり，$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_0, \hat{\boldsymbol{\lambda}}$ は $\boldsymbol{\lambda}$ の最尤推定量 (MLE) である．ただし，$\hat{\lambda}_0$ は $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_0$ の第 i 成分 $(i = 1, \cdots, n)$ とする．

ここで，尤度比をとると，

$$L := \frac{L_{\Theta_0}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_0)}{L_\Theta(\hat{\boldsymbol{\lambda}})} = \frac{\prod_{i=1}^n e^{-\bar{x}} \bar{x}^{x_i}/x_i!}{\prod_{i=1}^n e^{-x_i} x_i^{x_i}/x_i!} = \prod_{i=1}^n e^{x_i - \bar{x}} \left(\frac{\bar{x}}{x_i}\right)^{x_i} = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\bar{x}}{x_i}\right)^{x_i}$$

となり，L に基づく検定を**尤度比検定** (LRT) という．このとき，帰無仮説 H，すなわち Θ_0 の下で，$-2\log L$ が漸近的に自由度 $(n-1)$ のカイ 2 乗分布に従うことが知られている ([A03])．よって，尤度比検定統計量として，

$$T_{LR} := 2\sum_{i=1}^n X_i \log\left(\frac{X_i}{\bar{X}}\right) \tag{2.4}$$

をとれば，$T_{LR} > \chi^2_{n-1}(\alpha)$ のとき，帰無仮説 H を棄却する．ただし，$\chi^2_{n-1}(\alpha)$ は自由度 $(n-1)$ のカイ 2 乗分布における上側 $100\alpha\%$ 点とする．

2.3 条件付きカイ 2 乗検定

確率変数 $X_1, \cdots, X_n$ はたがいに独立に，各 X_i がポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda_i)$ に従い，$T := \sum_{i=1}^n X_i$ とおくとポアソン分布の再生性から，T はポアソン分布 $\mathrm{Po}(\sum_{i=1}^n \lambda_i)$ に従うので，$T = t$ を与えたときの $X_1, \cdots, X_n$ の条件付 (c.)j.p.m.f. は，

$$f_{X_1,\cdots,X_n|T}(x_1, \cdots, x_n|t) = \frac{t!}{x_1! \cdots x_n!}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}\right)^{x_1} \cdots \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}\right)^{x_n}$$

となる．ここで，

$$p_i := \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

とおけば，$T = t$ を与えたときの $X_1, \cdots, X_n$ の同時分布は，多項分布 $M_n(t; p_1, \cdots, p_n)$ に従うことが分かる．

ここで, カイ 2 乗適合度検定統計量として,

$$T_{CC} := \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\bar{X}} = \frac{(n-1)S^2}{\bar{X}} \tag{2.5}$$

をとれば, T_{CC} は帰無仮説 H の下で自由度 $(n-1)$ のカイ 2 乗分布に漸近的に従うことが知られている. ただし, $\bar{X} := (1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i$, $S^2 := (1/(n-1))\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$ とする. よって, $T_{CC} > \chi^2_{n-1}(\alpha)$ であるときに帰無仮説 H を棄却する. ただし, $\chi^2_{n-1}(\alpha)$ は, 自由度 $(n-1)$ のカイ 2 乗分布における上側 $100\alpha\%$ 点とする.

2.4 Neyman-Scott 検定

一般に, 確率変数 Z が自由度 $(n-1)$ のカイ 2 乗分布に従うとき, 中心極限定理より

$$\sqrt{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{Z}{n-1} - 1\right) \xrightarrow{L} N(0,1) \qquad (n \to \infty)$$

になる. いま, 第 2.3 節で示したように, 帰無仮説 H の下で, T_{CC} が自由度 $(n-1)$ のカイ 2 乗分布に従うので, 統計量として

$$T_{NS} := \sqrt{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{S^2}{\bar{X}} - 1\right) \tag{2.6}$$

を取れば, T_{NS} は漸近的に標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. この統計量は **Neyman-Scott 統計量**と呼ばれている. よって, $T_{NS} > u_\alpha$ であるときに帰無仮説 H を棄却する. ただし, u_α は標準正規分布 $N(0,1)$ における上側 $100\alpha\%$ 点とする.

3 マックス 検定

最大値統計量

$$M := \max_{1 \le i \le n} X_i \tag{3.1}$$

による検定を**マックス** (max) **検定**と呼ぶ. 特に, 分布が離散型である場合, 一般に, ある与えられた水準を達成する検定を得ることはできないので, 水準を達成する方法についても考える.

3.1 Levin の公式による近似マックス検定

カイ 2 乗適合度検定とマックス検定の精度を比較する方法として, Levin の公式 ([L81]) を用いた方法がある ([TA05]). ここではその方法を紹介した上で, ポアソン分布の母数に関する仮説検定問題に適用する.

定理 3.1 (Levin[L81]). 確率ベクトル $(X_1, \cdots, X_n)$ が多項分布 $M_n(t; p_1, \cdots, p_n)$ に従い, $a_1, \cdots, a_n$ を非負の整数値とする. このとき, 任意の $s > 0$ に対し

$$P\left(X_1 \le a_1, \cdots, X_n \le a_n\right) = \frac{t!}{s^t e^{-s}} \left\{\prod_{i=1}^{n} P(U_i \le a_i)\right\} P\left(W = t\right)$$

になる. ここで, $U_1, \cdots, U_n$ はたがいに独立で, 各 U_i はポアソン分布 $\mathrm{Po}(sp_i)$ に従う確率変数であり, $Y_1, \cdots, Y_n$ はたがいに独立で, 各 Y_i は値域 $\{0, 1, \cdots, a_i\}$ をもつ切断ポアソン分布 $\mathrm{TPo}(sp_i; a_i)$ に従う確率変数であり, $W := \sum_{i=1}^{n} Y_i$ とする.

証明は [TA05] 参照．定理 3.1 より，$a_1 = \cdots = a_n = c$ とすれば

$$P(M \le c) = \frac{t!}{s^t e^{-s}} \left\{ \prod_{i=1}^{n} P(U_i \le c) \right\} P(W = t)$$

となる．ここで $s = t$ とし，Stirling の公式を用いると

$$\frac{t!}{t^t e^{-t}} \approx \sqrt{2\pi t}$$

になる．ここで，$\mu_i := E(Y_i)$, $\sigma_i^2 := V(Y_i)$, $\mu_{3,i} := E[(Y_i - \mu_i)^3]$, $\mu_{4,i} := E[(Y_i - \mu_i)^4]$ $(i = 1, \cdots, n)$ とおく．定理??を用いて，標本の大きさ n が十分大きいとき，$P(W = t)$ は Edgeworth 展開によって

$$P(W = t) \approx f\left(\frac{t - \sum_{i=1}^{n} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}} \right) \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}}$$

で近似される．ただし，

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \left\{ 1 + \frac{\gamma_1}{6}(x^3 - 3x) + \frac{\gamma_2}{24}(x^4 - 6x^2 + 3) + \frac{\gamma_2}{72}(x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15) \right\}$$

とし，

$$\gamma_1 := \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_{3,i}}{(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2)^{3/2}}, \qquad \gamma_2 := \frac{1}{n} \frac{\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} \mu_{4,i} - 3\sigma_i^4)}{(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2)^2}$$

とする．よって，標本の大きさ n が十分大きいとき，

$$\begin{aligned} P(M \le c) &\approx \sqrt{2\pi t} \left\{ \prod_{i=1}^{n} P(U_i \le c) \right\} f\left(\frac{t - \sum_{i=1}^{n} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}} \right) \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}} \\ &=: \tilde{F}_{M|T}(c) \end{aligned} \tag{3.2}$$

となるので，任意の α $(0 < \alpha < 1)$ に対して，$\tilde{F}_{M|T}(c) = 1 - \alpha$ となるように c をとれば，c は M の分布の漸近的な上側 $100\alpha\%$ 点になる．

そこで，(3.2) を用いて水準 α $(0 < \alpha < 1)$ の検定について考える．マックス検定の棄却限界値 c は整数値を取るため，必ずしも有意水準を達成する棄却限界値を取ることはできない．そこで検定関数としてランダム検定関数

$$\phi_T^{(\alpha)}(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1 & (M \le c_T^{(\alpha)} - 1), \\ \gamma_T^{(\alpha)} & (M = c_T^{(\alpha)}), \\ 0 & (M \ge c_T^{(\alpha)} + 1) \end{cases} \tag{3.3}$$

を考える．ただし $c_T^{(\alpha)}$, $\gamma_T^{(\alpha)}$ は $E[\phi_T^{(\alpha)}(\boldsymbol{X})] = 1 - \alpha$ となるように定める，すなわち

$$P\left(\max_{1 \le i \le n} X_i \le c_T^{(\alpha)} - 1 \right) + \gamma_T^{(\alpha)} P\left(\max_{1 \le i \le n} X_i = c_T^{(\alpha)} \right) = 1 - \alpha$$

となるように定めるものとする．このとき，理論的にはランダム検定関数 (3.3) は水準 α の検定になるが，実際にその検定を実行するためには近似的にやらざるを得ない．そこで次節でその近似法について考える．

3.2 包除公式による近似マックス検定

包除公式による近似マックス検定を考える. いま, $A_1, A_2, \cdots, A_n$ を事象とし, $A = \cup_{i=1}^n A_i$ とする. このとき,

$$1_A = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - 1_{A_i})$$

となり, この右辺を展開し, 期待値をとると,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum\sum_{1\le i<j\le n} P(A_i \cap A_j) \\ &\quad + \sum\sum\sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \end{aligned}$$

となる. ただし, 1_A は A の定義関数とする. これは**包除 (inclusion exclusion) 公式**と呼ばれている.

いま, $T := \sum_{i=1}^n X_i$ とおく. 第 2.3 節で述べたように, 帰無仮説 H の下で, $T = t$ が与えられたときの $X_1, \cdots, X_n$ の条件付き同時分布は, 多項分布 $M_n(t; 1/n, \cdots, 1/n)$ に従うので,

$$\begin{aligned} P\left\{\max_{1\le i\le n} X_i \ge a \middle| T = t\right\} &= P\left\{(X_1 \ge a) \cup (X_2 \ge a) \cup \cdots \cup (X_n \ge a) \middle| T = t\right\} \\ &= \sum_{i=1}^n P\left\{X_i \ge a \middle| T = t\right\} - \sum\sum_{1\le i<j\le n} P\left\{X_i \ge a, X_j \ge a \middle| T = t\right\} \\ &\quad + \sum\sum\sum_{1\le i<j<k\le n} P\left\{X_i \ge a, X_j \ge a, X_k \ge a \middle| T = t\right\} \\ &\quad - \cdots + (-1)^{n-1} P\left\{X_1 \ge a, \cdots, X_n \ge a \middle| T = t\right\} \\ &= nP\left\{X_1 \ge a \middle| T = t\right\} - \frac{n(n-1)}{2} P\left\{X_1 \ge a, X_2 \ge a \middle| T = t\right\} \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} P\left\{X_1 \ge a, X_2 \ge a, X_3 \ge a \middle| T = t\right\} \\ &\quad - \cdots + (-1)^{n-1} P\left\{X_1 \ge a, \cdots, X_n \ge a \middle| T = t\right\} \end{aligned}$$

となる. ここで

$$Q_1^{(n)}(t, a) := P\left\{X_1 \ge a \middle| T = t\right\}$$

とおく. いま, $T = t$ が与えられたとき, X_1 は 2 項分布 $\mathrm{Bin}(t, 1/n)$ に従うので,

$$Q_1^{(n)}(t, a) = \sum_{x=a}^t \binom{t}{x} \left(\frac{1}{n}\right)^x \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{t-x}$$

になる. ここで

$$Q_1^{(n)}(t+1, a) = P\left\{X_1 \ge a \middle| T = t+1\right\}$$

について考えると,

$$\begin{aligned} Q_1^{(n)}(t+1,a) &= P\left\{X_1 \ge a \middle| T=t\right\} + P\left\{X_1 = a-1 \middle| T=t\right\} P\left\{X_1 = 1 \middle| T=1\right\} \\ &= Q_1^{(n)}(t,a) + \binom{t}{a-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{a-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{t-a+1}\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= Q_1^{(n)}(t,a) + \binom{t}{a-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{a}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{t-a+1} \end{aligned} \tag{3.4}$$

となる.

次に,

$$Q_2^{(n)}(t,a) := P\left\{X_1 \ge a, X_2 \ge a \middle| T=t\right\}$$

とおく. いま, $Q_2^{(n)}(t+1,a)$ について考えると, $T=t$ が与えられたとき, X_1, X_2 はそれぞれ 2 項分布 $\mathrm{Bin}(t,1/n)$ に従い, (X_1,X_2) の分布は対称であるから

$$Q_2^{(n)}(t+1,a) = Q_2^{(n)}(t,a) + 2\left(\frac{1}{n}\right) P\left\{X_1 = a-1, X_2 \ge a \middle| T=t\right\} \tag{3.5}$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned} P\left\{X_1 = a-1, X_2 \ge a \middle| T=t\right\} &= P\left\{X_1 = a-1 \middle| T=t\right\} P\left\{X_2 \ge a \middle| T=t, X_1 = a-1\right\} \\ &= \binom{t}{a-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{a-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{t-a+1} Q_1^{(n-1)}(t-a+1,a) \end{aligned}$$

となるから, (3.5) より

$$Q_2^{(n)}(t+1,a) = Q_2^{(n)}(t,a) + 2\binom{t}{a-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{a}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{t-a+1} Q_1^{(n-1)}(t-a+1,a)$$

となる.

一般に, $(2 \le)n \in \mathbb{N}$ を固定して, $2 \le k \le n$ なる $k \in \mathbb{N}$ について,

$$Q_k^{(n)}(t,a) := P\left\{X_1 \ge a, \cdots, X_k \ge a \middle| T=t\right\}$$

とおく. これは

$$\begin{aligned} Q_k^{(n)}(t,a) = \sum_{x_1=a}^{t-(k-1)a} \sum_{x_2=a}^{t-x_1} \cdots \sum_{x_k=a}^{t-(x_1+\cdots+x_{k-1})} \binom{t}{x_1}\binom{t-x_1}{x_2}\cdots\binom{t-(x_1+\cdots+x_{k-1})}{x_k} \\ \left(\frac{1}{n}\right)^{x_1+\cdots+x_k}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{t-(x_1+\cdots+x_k)} \end{aligned}$$

によって計算される. また, $n \in \mathbb{N}$ を固定して, $2 \le k \le n$ なる $k \in \mathbb{N}$ について,

$$Q_k^{(n)}(t+1,a) = Q_k^{(n)}(t,a) + k\binom{t}{a-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{a}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{t-a+1} Q_{k-1}^{(n-1)}(t-a+1,a) \tag{3.6}$$

が成り立つ.

実際, $2 \leq k \leq n$ なる $k \in \mathbb{N}$ について,

$$\begin{aligned}
&Q_k^{(n)}(t+1,a) \\
&\quad = P\left\{X_1 \geq a, \cdots, X_k \geq a \middle| T = t+1\right\} \\
&\quad = P\left\{X_1 \geq a, \cdots, X_k \geq a \middle| T = t\right\} \\
&\qquad + P\left\{X_1 = a-1, X_2 \geq a, \cdots, X_k \geq a \middle| T = t\right\} P\left\{X_1 = 1 \middle| T = 1\right\} \\
&\qquad + P\left\{X_1 \geq a, X_2 = a-1, \cdots, X_k \geq a \middle| T = t\right\} P\left\{X_2 = 1 \middle| T = 1\right\} \\
&\qquad + \cdots + P\left\{X_1 \geq a, \cdots, X_{k-1} \geq a, X_k = a-1 \middle| T = t\right\} P\left\{X_k = 1 \middle| T = 1\right\}
\end{aligned}$$

となる. ここで, $P\{X_1 = 1 | \sum_{i=1}^n X_i = 1\} = 1/n$ であり, $(X_1, \cdots, X_k)$ の分布には対称性があるので,

$$Q_k^{(n)}(t+1,a) = Q_k^{(n)}(t,a) + k\left(\frac{1}{n}\right) P\left\{X_1 = a-1, X_2 \geq a, \cdots, X_k \geq a \middle| T = t\right\} \tag{3.7}$$

と表せる. また, (3.7) の第2項目については,

$$\begin{aligned}
&P\left\{X_1 = a-1, X_2 \geq a, \cdots, X_k \geq a \middle| T = t\right\} \\
&\qquad = P\left\{X_1 = a-1 \middle| T = t\right\} P\left\{X_2 \geq a, \cdots, X_k \geq a \middle| \sum_{i=2}^n X_i = t-a+1\right\} \\
&\qquad = \binom{t}{a-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{a-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{t-a+1} Q_{k-1}^{(n-1)}(t-a+1,a)
\end{aligned}$$

となるので, (3.6) を得る.

ここで,

$$\begin{aligned}
P_H^{(n)}(a|t) := nQ_1^{(n)}(t,a) - \frac{n(n-1)}{2}Q_2^{(n)}(t,a) \\
+ \frac{n(n-1)(n-2)}{6}Q_3^{(n)}(t,a) - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}Q_4^{(n)}(t,a)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

とおく. (3.8) は (3.6) を用いて帰納的に求められる. なお, $1 - P_H^{(n)}(a|t)$ は, 帰無仮説 H の下での最大値統計量の c.d.f. の近似式になるので, これを用いて (3.3) のようなランダム検定関数 $\phi_T^{(\alpha)}(\boldsymbol{X})$ を定めることができる.

一方, 対立仮説 K の下で, $T = t$ が与えられたとき, $(X_1, \cdots, X_n)$ の条件付き同時分布は多項分布 $M_n(t; \lambda_1/\Lambda, \cdots, \lambda_n/\Lambda)$ に従うことに注意しておく. ただし, $\Lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ とする. また, 対立仮説 K の下でも, 包除公式

$$\begin{aligned}
&P_K\left\{\max_{1 \leq i \leq n} X_i \geq a \middle| T = t\right\} \\
&\qquad = P_K\left\{(X_1 \geq a) \cup (X_2 \geq a) \cup \cdots \cup (X_n \geq a) \middle| T = t\right\}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P_K\left\{X_i \geq a \middle| T = t\right\} - \sum\sum_{1 \leq i < j \leq n} P_K\left\{X_i \geq a, X_j \geq a \middle| T = t\right\}$$
$$+ \sum\sum\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P_K\left\{X_i \geq a, X_j \geq a, X_k \geq a \middle| T = t\right\}$$
$$- \cdots + (-1)^{n-1} P_K\left\{X_1 \geq a, \cdots, X_n \geq a \middle| T = t\right\}$$

が成り立つ. ここで, $(2 \leq)n \in \mathbb{N}$ を固定して, 各 $i = 1, \cdots, n$ について

$$R_i^{(n)}(t, a) := P_K\left\{X_i \geq a \middle| T = t\right\}$$

とおく. 特に, $T = t$ が与えられたとき, 各 X_i は 2 項分布 $\mathrm{Bin}(t, \lambda_i/\Lambda)$ に従うので,

$$R_i^{(n)}(t, a) = \sum_{x_i = a}^{t} \binom{t}{x_i} \left(\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right)^{x_i} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda}\right)^{t - x_i}$$

になる. このとき

$$\begin{aligned}
&R_i^{(n)}(t+1, a) \\
&\quad = P_K\left\{X_i \geq a \middle| T = t+1\right\} \\
&\quad = P_K\left\{X_i \geq a \middle| T = t\right\} + P\left\{X_i = a-1 \middle| T = t\right\} P\left\{X_i = 1 \middle| T = 1\right\} \\
&\quad = R_i^{(n)}(t, a) + \binom{t}{a-1} \left(\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda}\right)^{t-a+1} \left(\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right) \\
&\quad = R_i^{(n)}(t, a) + \binom{t}{a-1} \left(\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right)^{a} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda}\right)^{t-a+1}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

になる.

次に,

$$R_{ij}^{(n)}(t, a) := P\left\{X_i \geq a, X_j \geq a \middle| T = t\right\} \qquad (1 \leq i < j \leq n;\ i, j \in \mathbb{N})$$

とおくと,

$$R_{ij}^{(n)}(t, a) = \sum_{x_i = a}^{t-a} \sum_{x_j = a}^{t - x_i} \binom{t}{x_i} \binom{t - x_i}{x_j} \left(\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right)^{x_i} \left(\frac{\lambda_j}{\Lambda}\right)^{x_j} \left\{1 - \left(\frac{\lambda_i}{\Lambda} + \frac{\lambda_j}{\Lambda}\right)\right\}^{t - (x_i + x_j)}$$

になる. このとき

$$\begin{aligned}
R_{ij}^{(n)}(t+1, a) &= P_K\left\{X_i \geq a, X_j \geq a \middle| T = t+1\right\} \\
&= P_K\left\{X_i \geq a, X_j \geq a \middle| T = t\right\} \\
&\qquad + P_K\left\{X_i = a-1, X_j \geq a \middle| T = t\right\} P_K\left\{X_i = 1 \middle| T = 1\right\} \\
&\qquad + P_K\left\{X_i \geq a, X_j = a-1 \middle| T = t\right\} P_K\left\{X_j = 1 \middle| T = 1\right\} \\
&= R_{ij}^{(n)}(t, a) + \left(\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right) P_K\left\{X_i = a-1, X_j \geq a \middle| T = t\right\}
\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{\lambda_j}{\Lambda}\right) P_K\left\{X_i \geq a, X_j = a-1 \middle| T=t\right\} \tag{3.10}$$

となる．ここで，(3.10) の最右辺の第 2 項目について考えると，

$$\begin{aligned}
&P_K\left\{X_i = a-1, X_j \geq a \middle| T=t\right\} \\
&\qquad = P_K\left\{X_i = a-1 \middle| T=t\right\} P_K\left\{X_j \geq a \middle| T=t, X_i = a-1\right\} \\
&\qquad = \binom{t}{a-1}\left(\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right)^{a-1}\left(1-\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right)^{t-a+1} {}^{i}R_j^{(n)}(t-a+1, a)
\end{aligned}$$

となり，第 3 項目についても同様に計算できるので，

$$\begin{aligned}
R_{ij}^{(n)}(t+1, a) = R_{ij}^{(n)}(t, a) &+ \binom{t}{a-1}\left(\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right)^{a}\left(1-\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right)^{t-a+1} {}^{i}R_j^{(n)}(t-a+1, a) \\
&+ \binom{t}{a-1}\left(\frac{\lambda_j}{\Lambda}\right)^{a}\left(1-\frac{\lambda_j}{\Lambda}\right)^{t-a+1} {}^{j}R_i^{(n)}(t-a+1, a)
\end{aligned}$$

となる．ただし，

$${}^{i}R_j^{(n)}(t-a+1, a) := P\left\{X_j \geq a \middle| T=t, X_i = a-1\right\}$$

とする．${}^{i}R_j^{(n)}(t-a+1, a)$ は $R_i^{(n)}(t, a)$ と同様の漸化式 (3.9) を得ることができるので，同様にして計算することができる．

同様に，$(2 \leq) n \in \mathbb{N}$ を固定して，$2 \leq k \leq n$ なる $k \in \mathbb{N}$ について

$$\begin{aligned}
R_{i_1, i_2, \cdots, i_k}^{(n)}(t, a) := P\left\{X_{i_1} \geq a, \cdots, X_{i_k} \geq a \middle| T=t\right\} \\
(1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n;\ i_1, \cdots, i_k \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
R_{i_1, i_2, \cdots, i_k}^{(n)}(t, a) = \sum_{x_{i_1}=a}^{t-(k-1)a} \sum_{x_{i_2}=a}^{t-x_{i_1}} \cdots \sum_{x_{i_k}=a}^{t-(x_{i_1}+\cdots+x_{i_{k-1}})} &\binom{t}{x_{i_1}}\binom{t-x_{i_1}}{x_{i_2}} \cdots \binom{t-(x_{i_1}+\cdots+x_{i_{k-1}})}{x_{i_k}} \\
&\left(\frac{\lambda_{i_1}}{\Lambda}\right)^{x_{i_1}} \cdots \left(\frac{\lambda_{i_k}}{\Lambda}\right)^{x_{i_k}} \left(1-\frac{\lambda_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_k}}{\Lambda}\right)^{t-(x_{i_1}+\cdots+x_{i_k})}
\end{aligned}$$

になる．また，$n \in \mathbb{N}$ を固定すると，

$$\begin{aligned}
&R_{i_1, i_2, \cdots, i_k}^{(n)}(t+1, a) \\
&\qquad = P_K\left\{X_{i_1} \geq a, \cdots, X_{i_k} \geq a \middle| T=t+1\right\} \\
&\qquad = P_K\left\{X_{i_1} \geq a, \cdots, X_{i_k} \geq a \middle| T=t\right\} \\
&\qquad\quad + P_K\left\{X_{i_1} = a-1, X_{i_2} \geq a, \cdots, X_{i_k} \geq a \middle| T=t\right\} P_K\left\{X_{i_1} = 1 \middle| T=1\right\} \\
&\qquad\quad + P_K\left\{X_{i_1} \geq a, X_{i_2} = a-1, \cdots, X_{i_k} \geq a \middle| T=t\right\} P_K\left\{X_{i_2} = 1 \middle| T=1\right\}
\end{aligned}$$

$$+\cdots+P_K\left\{X_{i_1}\geq a,\cdots,X_{i_{k-1}}\geq a,X_{i_k}=a-1\middle|T=t\right\}P_K\left\{X_{i_k}=1\middle|T=1\right\}$$
$$=R^{(n)}_{i_1,\cdots,i_k}(t,a)+\left(\frac{\lambda_{i_1}}{\Lambda}\right)P_K\left\{X_{i_1}=a-1,X_{i_2}\geq a,\cdots,X_{i_k}\geq a\middle|T=t\right\}$$
$$+\left(\frac{\lambda_{i_2}}{\Lambda}\right)P_K\left\{X_{i_1}\geq a,X_{i_2}=a-1,\cdots,X_{i_k}\geq a\middle|T=t\right\}$$
$$+\cdots+\left(\frac{\lambda_{i_k}}{\Lambda}\right)P_K\left\{X_{i_1}\geq a,\cdots,X_{i_{k-1}}\geq a,X_{i_k}=a-1\middle|T=t\right\}\qquad(3.11)$$

となる. ここで, (3.11) の最右辺の第 2 項目について,

$$P_K\left\{X_{i_1}=a-1,X_{i_2}\geq a,\cdots,X_{i_k}\geq a\middle|T=t\right\}$$
$$=P_K\left\{X_{i_1}=a-1\middle|T=t\right\}P_K\left\{X_{i_2}\geq a,\cdots,X_{i_k}\geq a\middle|T=t,X_{i_1}=a-1\right\}$$
$$=\binom{t}{a-1}\left(\frac{\lambda_{i_1}}{\Lambda}\right)^{a-1}\left(1-\frac{\lambda_{i_1}}{\Lambda}\right)^{t-a+1}{}^{i_1}R^{(n)}_{i_2,\cdots,i_k}(t-a+1,a)$$

となる. 第 3, $\cdots,(k+1)$ 項目についても同様に計算すると,

$$R^{(n)}_{i_1,i_2,\cdots,i_k}(t+1,a)=R^{(n)}_{i_1,i_2,\cdots,i_k}(t,a)+\binom{t}{a-1}\left(\frac{\lambda_{i_1}}{\Lambda}\right)^{a}\left(1-\frac{\lambda_{i_1}}{\Lambda}\right)^{t-a+1}{}^{i_1}R^{(n)}_{i_2,\cdots,i_k}(t-a+1,a)$$
$$+\cdots+\binom{t}{a-1}\left(\frac{\lambda_{i_k}}{\Lambda}\right)^{a}\left(1-\frac{\lambda_{i_k}}{\Lambda}\right)^{t-a+1}{}^{i_k}R^{(n)}_{i_1,\cdots,i_{k-1}}(t-a+1,a)$$
$$(3.12)$$

となる. ただし,

$${}^{i_j}R^{(n)}_{i_1,\cdots,i_{j-1},i_{j+1},\cdots,i_k}(t-a+1,a)$$
$$:=P\left\{X_{i_1}\geq a,\cdots,X_{i_{j-1}}\geq a,X_{i_{j+1}}\geq a,\cdots,X_{i_k}\geq a\middle|T=t,X_{i_j}=a-1\right\}$$

とする $(1\leq j\leq k;\ j\in\mathbb{N})$. ${}^{i_j}R^{(n)}_{i_1,\cdots,i_{j-1},i_{j+1},\cdots,i_k}(t-a+1,a)$ は $R^{(n)}_{i_1,\cdots,i_{k-1}}(t,a)$ と同様の漸化式を導くことができるので, 同じように計算することができる.

ここで,

$$P^{(n)}_K(a|t):=\sum_{i=1}^{n}R^{(n)}_i(t,a)-\sum\sum_{1\leq i<j\leq n}R^{(n)}_{ij}(t,a)$$

とおくと, これは (3.12) を用いて帰納的に求められ, $1-P^{(n)}_K(a|t)$ は, 最大値統計量 M の対立仮説 K の下での分布の c.d.f. の近似式になるので, これを用いて検出力を求めることができる.

4　シミュレーションによる検定の比較

第2章, 第3章では, それぞれの検定統計量について, 水準α $(0 < \alpha < 1)$ の検定の棄却限界値の取り方について論じた. その棄却限界値は漸近的に有意水準を達成するが, その精度は標本の大きさやポアソン分布の母数等に大きく依存する. 実際に検定を行う場合, 与えられた条件の下で有意水準を達成するのか, また検出力が高いか否かということが, 検定を選ぶ基準となる. 特に, 検出力の計算が難しいため, 従来, 検出力による比較はほとんど行われていない ([BZ02]). 本章では, シミュレーションによって, それぞれの検定の水準の達成精度を検証する. また検出力によって検定を比較し, 望ましい検定について考える.

4.1　水準の比較

まず, 第2章, 第3章で提案した検定統計量による検定の棄却限界値とそのp値について考える. Anscombe の分散安定変換に基づく検定統計量T_{ANS}, 尤度比検定統計量T_{ML}, 条件付きカイ2乗検定統計量T_{CC}は, 漸近的に自由度$(n-1)$のカイ2乗分布に従うので棄却限界値として$\chi^2_{n-1}(\alpha)$, Neyman-Scott 検定統計量T_{NS}は漸近的に標準正規分布$N(0,1)$に従うので, 棄却限界値としてu_αを取り, $T_{ANS}, T_{ML}, T_{CC} > \chi^2_{n-1}(\alpha)$, $T_{NS} > u_\alpha$であるとき, それぞれ帰無仮説Hを棄却するものとする. ただし, $\chi^2_{n-1}(\alpha)$は自由度$(n-1)$のカイ2乗分布における上側$100\alpha\%$点, u_αは標準正規分布$N(0,1)$における上側$100\alpha\%$点とする. また, 近似マックス検定については, 与えられた$T=t$に基づき, (3.3) のようなランダム検定関数を定め, 最大値統計量Mの棄却限界値を決定するものとする.

ここで, シミュレーションによってこれらの検定の精度を検証する. いま$n = 5$, 10, 15, 20, また$\lambda = 5$, 10, 20とし, 各々の場合について100万組の標本を発生させ, それぞれの統計量を計算し, 水準αを定めた検定において棄却されるか, 受容されるかを調べた. 表4.1はその比率を計算し, まとめたものである. これらの値は予め与えられたαに近いほど望ましい検定である. 表4.1によると, 次のことが分かる.

まず, Anscombe の分散安定変換に基づく検定のp値は, 標本の大きさnを固定したとき, λが大きくなるにつれてαに近づいていることがわかる. よって, λが大きければ良い検定になることが予想される. Anscombe の分散安定変換は, 大きい母数λについて有効であったので, この観点からもこの予想は妥当である. また, λを固定させ, 標本の大きさnを変化させても, 水準の精度はそれほど変化していないことが分かる. よって, Anscombe の分散安定変換に基づく検定は, λが大きく, なおかつ標本の大きさnが少ないときに適切な検定である.

尤度比検定のp値は, 標本の大きさnを固定したとき, λが大きくなるにつれてαに近づいている. また, λを固定すると, 標本の大きさnが大きくなるにつれて検定の水準の達成精度が悪化している. この検定の特徴として, $\lambda = 5$のときには極端に悪い水準を示しているが, λが大きくなるにつれて良い水準を示す傾向にある. また, Anscombe の分散安定変換に基づく検定と同様, 標本の大きさnが大きくなるにつれて水準が悪くなる傾向があるが, その度合いは Anscombe の分散安定変換に基づく検定より小さい. しかし, 全体的に尤度比検定よりも Anscombe の分散安定変換に基づく検定の方が良いことが分かる.

条件付きカイ2乗検定のp値は, 標本の大きさnを固定すると, Anscombe の分散安定変換に基づく検定や尤度比検定と同様, λが大きくなるにつれて良い水準を達成している. 逆に母数λを固定すると, 標本の大きさnが大きくなるにつれ, 良い水準を達成している.

また, この表から条件付きカイ 2 乗検定は全体的に水準 α よりも小さい値を示す傾向にあることが分かる. 全体的に, 条件付きカイ 2 乗検定は良い水準を達成しており, 特に標本の大きさ n が大きければ大変有用な検定であることが分かる.

Neyman-Scott 検定の p 値は, 標本の大きさ n を固定すれば, λ が大きくなるに水準は悪くなり, 母数 λ を固定すると, 標本の大きさ n が大きくなるにつれ, $\alpha = 0.1$ のときを除いて水準は良くなる. しかし, Neyman-Scott 検定は全体的に水準の精度が良くないことが分かる.

包除公式による近似マックス検定は標本の大きさ n や, 母数 λ の値に関わらず, 非常に良い水準を達成している.

表 4.1 から, 条件付きカイ 2 乗検定と包除公式を用いた近似マックス検定が全体的に非常に良い水準を達成していることが分かる. 近似マックス検定は標本の大きさ n や母数 λ の値に関わらず良い水準を達成しているが, 標本の大きさ n が大きくなるにつれて棄却限界値を計算することが困難になるため, 実際の利用法として, 標本の大きさ n が小さいときには近似マックス検定, 標本の大きさ n が比較的大きいときには条件付きカイ 2 乗検定を採用することが適当である. また Anscombe の分散安定変換を用いた検定は, 母数 λ が大きいとき精度が向上するので, 場合によっては Anscombe の分散安定変換を用いた検定を用いることもできる.

		Anscombe の分散安定変換の基づく検定				尤度比検定			
n	λ	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$
5	5	0.10566	0.05663	0.01408	0.00739	0.11871	0.06570	0.01550	0.00795
5	10	0.10238	0.05266	0.01186	0.00648	0.10679	0.05396	0.01125	0.00587
5	20	0.10105	0.05110	0.01073	0.00552	0.10346	0.05228	0.01079	0.00550
10	5	0.10985	0.05945	0.01352	0.00693	0.12778	0.06923	0.01598	0.00839
10	10	0.10380	0.05406	0.01239	0.00666	0.10967	0.05592	0.01195	0.00623
10	20	0.10174	0.05179	0.01098	0.00570	0.10529	0.05308	0.01089	0.00543
15	5	0.11196	0.05950	0.01341	0.00697	0.13206	0.07130	0.01675	0.00883
15	10	0.10444	0.05466	0.01270	0.00686	0.11146	0.05729	0.01231	0.00635
15	20	0.10207	0.05176	0.01101	0.00563	0.10472	0.05313	0.01093	0.00550
20	5	0.11214	0.05976	0.01356	0.00712	0.13594	0.07379	0.01756	0.00939
20	10	0.10526	0.05491	0.01253	0.00673	0.11244	0.05787	0.01240	0.00637
20	20	0.10201	0.05196	0.01104	0.00571	0.10589	0.05376	0.01110	0.00563

		条件付カイ 2 乗検定				Neyman-Scott 検定			
n	λ	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$
5	5	0.09360	0.04567	0.00913	0.00457	0.10231	0.06648	0.02946	0.02142
5	10	0.09843	0.04863	0.00964	0.00489	0.10477	0.06813	0.03046	0.02237
5	20	0.09895	0.04914	0.00963	0.00483	0.10581	0.06994	0.03104	0.02309
10	5	0.09710	0.04816	0.00991	0.00525	0.10396	0.06566	0.02539	0.01788
10	10	0.09741	0.04840	0.00997	0.00516	0.10594	0.06639	0.02584	0.01814
10	20	0.09896	0.04950	0.01005	0.00511	0.10675	0.06663	0.02606	0.01825
15	5	0.09793	0.04976	0.01058	0.00549	0.10628	0.06427	0.02382	0.01613
15	10	0.09800	0.04967	0.01016	0.00523	0.10647	0.06446	0.02357	0.01612
15	20	0.09965	0.04972	0.01002	0.00503	0.10635	0.06463	0.02348	0.01588
20	5	0.09814	0.04974	0.01052	0.00548	0.10494	0.06289	0.02221	0.01500
20	10	0.09922	0.04958	0.01023	0.00526	0.10632	0.06333	0.02212	0.01464
20	20	0.09922	0.04960	0.01005	0.00510	0.10726	0.06417	0.02208	0.01459

		包除公式を用いた近似マックス検定			
n	λ	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$
5	5	0.10010	0.05007	0.01003	0.00500
5	10	0.10023	0.05019	0.01004	0.00508
5	20	0.09982	0.05016	0.01023	0.00514
10	5	0.09975	0.04987	0.00998	0.00496
10	10	0.10004	0.05016	0.00983	0.00494
10	20	0.09977	0.04973	0.01000	0.00497
15	5	0.10053	0.05045	0.00999	0.00493
15	10	0.10023	0.05022	0.01021	0.00511
15	20	0.10029	0.05032	0.01002	0.00503
20	5	0.09950	0.04969	0.00997	0.00496
20	10	0.10033	0.05022	0.01006	0.00497
20	20	0.10071	0.05027	0.01004	0.00505

表 4.1 検定の水準の達成状況

4.2 検出力の比較

Anscombe の分散安定変換に基づく検定と近似マックス検定は, 対立仮説 K の下で検定統計量の c.d.f. を求めることが可能であるので, この 2 つの検定を検出力の観点から比較

する.

近似マックス検定は, 与えられた$T=t$の値によってc.d.f.が求められるため, 与えられた$T=t$の値によって検出力が異なる. ここで, 検出力の比較をするためには$T=t$の値を1つ固定しなければならない. いま, Tの分布はポアソン分布の再生性から$\mathrm{Po}(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)$に従うので, $E(T)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$になる. そこで, $T=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$が与えられたときの近似マックス検定の検出力と, Anscombeの分散安定変換に基づく検定の検出力を比較する.

i) $n=5$の場合. 帰無仮説Hに対して対立仮説$K_1 \sim K_8$を下記のように定める.

$$
\begin{aligned}
H &: \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=10\\
K_1 &: \lambda_1=15,\ \lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=10\\
K_2 &: \lambda_1=20,\ \lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=10\\
K_3 &: \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=15,\ \lambda_4=\lambda_5=10\\
K_4 &: \lambda_1=5,\ \lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=10\\
K_5 &: \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=5,\ \lambda_4=\lambda_5=10\\
K_6 &: \lambda_1=17,\ \lambda_2=13,\ \lambda_3=10,\ \lambda_4=7,\ \lambda_5=3\\
K_7 &: \lambda_1=20,\ \lambda_2=15,\ \lambda_3=10,\ \lambda_4=3,\ \lambda_5=2\\
K_8 &: \lambda_1=12,\ \lambda_2=11,\ \lambda_3=10,\ \lambda_4=9,\ \lambda_5=8
\end{aligned}
$$

ここで, 各対立仮説K_i $(i=1,\cdots,8)$に対する検出力を求める. まず, Anscombeの分散安定変換に基づく検定統計量を用いて検出力を求めると, 表4.2になる. また, 包除公式を用いた近似マックス検定によって検出力を求めると, 表4.6になる.

表4.2と表4.6を比較すると, 対立仮説K_1, K_2の下では近似マックス検定の方が高い検出力を示し, 対立仮説$K_3 \sim K_8$の下ではAnscombeの分散安定変換に基づく検定の方が高い検出力を示していることが分かる.

ii) $n=10$の場合. 帰無仮説Hに対して対立仮説$K_1 \sim K_7$を下記のように定める.

$$
\begin{aligned}
H &: \lambda_1=\cdots=\lambda_{10}=10\\
K_1 &: \lambda_1=15,\ \lambda_2=\cdots=\lambda_{10}=10\\
K_2 &: \lambda_1=20,\ \lambda_2=\cdots=\lambda_{10}=10\\
K_3 &: \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=15,\ \lambda_4=\cdots=\lambda_{10}=10\\
K_4 &: \lambda_1=5,\ \lambda_2=\cdots=\lambda_{10}=10\\
K_5 &: \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=5,\ \lambda_4=\cdots=\lambda_{10}=10\\
K_6 &: \lambda_1=\lambda_2=17,\ \lambda_3=\lambda_4=13,\ \lambda_5=\lambda_6=10,\ \lambda_7=\lambda_8=7,\ \lambda_9=\lambda_{10}=3\\
K_7 &: \lambda_1=14,\ \lambda_2=13,\ \lambda_3=12,\ \lambda_4=11,\ \lambda_5=\lambda_6=10,\ \lambda_7=9,\ \lambda_8=8,\ \lambda_9=7,\ \lambda_{10}=6.
\end{aligned}
$$

$n=5$の場合と同様にして, 各対立仮説K_i $(i=1,\cdots,7)$に対する検出力を求める. Anscombeの分散安定変換に基づく検定統計量を用いて検出力を求めると, 表4.3になる. また, 包除公式を用いた近似マックス検定によって検出力を求めると, 表4.7になる. 表

4.3, 表 4.7 を比較すると, 対立仮説 K_1, K_2 の下では近似マックス検定の方が高い検出力を示し, 対立仮説 $K_3 \sim K_7$ の下においては Anscombe の分散安定変換に基づく検定の方が高い検出力を示すことが分かる.

iii) $n = 15$ の場合. 帰無仮説 H に対して対立仮説 $K_1 \sim K_7$ を下記のように定める.

$$
\begin{aligned}
H &: \lambda_1 = \cdots = \lambda_{15} = 10 \\
K_1 &: \lambda_1 = 15,\ \lambda_2 = \cdots = \lambda_{15} = 10 \\
K_2 &: \lambda_1 = 20,\ \lambda_2 = \cdots = \lambda_{15} = 10 \\
K_3 &: \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 15,\ \lambda_4 = \cdots = \lambda_{15} = 10 \\
K_4 &: \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = \cdots = \lambda_{15} = 10 \\
K_5 &: \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 5,\ \lambda_4 = \cdots = \lambda_{15} = 10 \\
K_6 &: \lambda_1 = \lambda_2 = 20,\ \lambda_3 = \lambda_4 = 15,\ \lambda_5 = \lambda_6 = 12,\ \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = 10, \\
&\qquad \lambda_{10} = \lambda_{11} = 8,\ \lambda_{12} = \lambda_{13} = 3,\ \lambda_{14} = \lambda_{15} = 2 \\
K_7 &: \lambda_1 = 17,\ \lambda_2 = 16, \lambda_3 = 15,\ \lambda_4 = 14,\ \lambda_5 = 13,\ \lambda_6 = 12,\ \lambda_7 = 11,\ \lambda_8 = 10, \\
&\qquad \lambda_9 = 9,\ \lambda_{10} = 8,\ \lambda_{11} = 7,\ \lambda_{12} = 6,\ \lambda_{13} = 5,\ \lambda_{14} = 4,\ \lambda_{15} = 3
\end{aligned}
$$

Anscombe の分散安定変換に基づく検定統計量を用いて検出力を求めると, 表 4.4 になる. また, 包除公式による近似マックス検定の検出力を求めると, 表 4.8 になる. 表 4.4, 表 4.8 を比較すると, 対立仮説 K_1, K_2 の下では近似マックス検定の方が高い検出力を示し, 対立仮説 $K_3 \sim K_7$ の下においては Anscombe の分散安定変換に基づく検定の方が高い検出力を示していることが分かる.

iv) $n = 20$ の場合. 帰無仮説 H に対して対立仮説 $K_1 \sim K_7$ を下記のように定める.

$$
\begin{aligned}
H &: \lambda_1 = \cdots = \lambda_{20} = 10 \\
K_1 &: \lambda_1 = 15,\ \lambda_2 = \cdots = \lambda_{20} = 10 \\
K_2 &: \lambda_1 = 20,\ \lambda_2 = \cdots = \lambda_{20} = 10 \\
K_3 &: \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 15,\ \lambda_4 = \cdots = \lambda_{20} = 10 \\
K_4 &: \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = \cdots = \lambda_{20} = 10 \\
K_5 &: \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 5,\ \lambda_4 = \cdots = \lambda_{20} = 10 \\
K_6 &: \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 20,\ \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 15,\ \lambda_7 = \cdots = \lambda_{11} = 10, \\
&\qquad \lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{14} = 7,\ \lambda_{15} = \lambda_{16} = \lambda_{17} = 5,\ \lambda_{18} = \lambda_{19} = \lambda_{20} = 3 \\
K_7 &: \lambda_1 = 19,\ \lambda_2 = 18,\ \lambda_3 = 17,\ \lambda_4 = 16,\ \lambda_5 = 15,\ \lambda_6 = 14, \\
&\qquad \lambda_7 = 13,\ \lambda_8 = 12,\ \lambda_9 = 11,\ \lambda_{10} = \lambda_{11} = 10,\ \lambda_{12} = 9,\ \lambda_{13} = 8, \\
&\qquad \lambda_{14} = 7,\ \lambda_{15} = 6,\ \lambda_{16} = 5,\ \lambda_{17} = 4,\ \lambda_{18} = 3,\ \lambda_{19} = 2,\ \lambda_{20} = 1
\end{aligned}
$$

Anscombe の分散安定変換に基づく検定統計量を用いて検出力を求めると, 表 4.5 になる. また, 包除公式による近似マックス検定の検出力を求めると, 表 4.9 になる. 表 4.5, 表

4.9 を比較すると, 対立仮説 $K_1 \sim K_3$ の下では近似マックス検定の方が高い検出力を示し, 対立仮説 $K_4 \sim K_7$ の下においては Anscombe の分散安定変換に基づく検定の方が高い検出力を示している.

これらのシュミレーションの結果, 次のことが分かる.

対立仮説 K_1, K_2 のような, ある少数個の母数が突出している対立仮説の場合においては, 近似マックス検定の方が高い検出力を示すが, K_4, K_5 のような他の母数に比べて, 小さい母数が少数ある対立仮説においては Anscombe の分散安定変換に基づく検定の方が高い検出力を示している. この傾向は, 観測値の中で最大のものを取るという近似マックス検定の特質を考えても妥当であり, 標本の大きさ n や母数 λ を変化させても保たれると考えられる. また対立仮説 K_3 においては, $n = 5, 10, 15$ の場合は Anscombe の分散安定変換に基づく検定の方が高い検出力を示しているが, $n = 20$ の場合は近似マックス検定の方が高い検出力を示している. また標本の大きさが $n = 5, 10, 15$ と大きくなるにつれ, Anscombe の分散安定変換に基づく検定と近似マックス検定の検出力の差は小さくなっている. これは, K_3 のような複数個の母数が他の母数よりも大きい対立仮説の場合は, 全体の標本の大きさに対して大きい母数の数の割合が低いときには近似マックス検定, 高いときには Anscombe の分散安定変換に基づく検定の方が検出力が高くなることを示唆している, と考えられる. 言い換えると, ポアソン分布の母数のばらつきの程度が大きければ Anscombe の分散安定変換に基づく検定の方がよい. このことは対立仮説 K_6, K_7 の検出力の比較からも分かる. また, 一般的な傾向として近似マックス検定は与えられる $T = t$ の値が大きくなるにつれて検出力が高くなる.

	$\alpha = 0.100$	$\alpha = 0.050$	$\alpha = 0.010$	$\alpha = 0.005$
K_1	0.23374	0.14361	0.04445	0.02645
K_2	0.58478	0.45696	0.23537	0.17150
K_3	0.30438	0.19922	0.07031	0.04406
K_4	0.33167	0.22172	0.08178	0.05215
K_5	0.44781	0.32367	0.14079	0.09583
K_6	0.90713	0.84348	0.65831	0.57324
K_7	0.99815	0.99526	0.97737	0.96262
K_8	0.18180	0.10530	0.02884	0.01636

表 4.2 $n = 5$ における Anscombe の分散安定変換に基づく検定の検出力

	$\alpha = 0.100$	$\alpha = 0.050$	$\alpha = 0.010$	$\alpha = 0.005$
K_1	0.19847	0.11634	0.03258	0.01864
K_2	0.49971	0.37049	0.17026	0.11855
K_3	0.34990	0.23532	0.08785	0.05631
K_4	0.27580	0.17479	0.05761	0.03515
K_5	0.53179	0.40168	0.19220	0.13602
K_6	0.98659	0.97139	0.90451	0.86170
K_7	0.47464	0.34667	0.15426	0.10603

表 4.3 $n = 10$ における Anscombe の分散安定変換に基づく検定の検出力

	$\alpha = 0.100$	$\alpha = 0.050$	$\alpha = 0.010$	$\alpha = 0.005$
K_1	0.18005	0.10279	0.02719	0.01520
K_2	0.44064	0.31403	0.13238	0.08902
K_3	0.33130	0.21882	0.07851	0.04952
K_4	0.24423	0.14968	0.04591	0.02721
K_5	0.50960	0.37882	0.17486	0.12195
K_6	0.99998	0.99994	0.99944	0.99882
K_7	0.98790	0.97378	0.91051	0.86952

表 4.4 $n = 15$ における Anscombe の分散安定変換に基づく検定の検出力

	$\alpha = 0.100$	$\alpha = 0.050$	$\alpha = 0.010$	$\alpha = 0.005$
K_1	0.16863	0.09462	0.02411	0.01328
K_2	0.39874	0.27574	0.10885	0.07128
K_3	0.31046	0.20115	0.06921	0.04291
K_4	0.22400	0.13414	0.03914	0.02274
K_5	0.47971	0.34945	0.15419	0.10556
K_6	0.99999	0.99994	0.99948	0.99890
K_7	1.00000	0.99998	0.99982	0.99960

表 4.5 $n = 20$ における Anscombe の分散安定変換に基づく検定の検出力

対立仮説 K_1 における検出力

t	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$
30	0.18165	0.11085	0.03337	0.02052
35	0.19636	0.12055	0.03942	0.02358
40	0.21516	0.13330	0.04448	0.02847
45	0.22818	0.14698	0.05103	0.03174
50	0.24340	0.15784	0.05730	0.03710
55	0.26152	0.17191	0.06370	0.04114
60	0.27742	0.18650	0.07225	0.04652
65	0.29139	0.19775	0.07803	0.05205
70	0.30768	0.21161	0.08605	0.05710

対立仮説 K_2 における検出力

t	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$
30	0.38639	0.28909	0.12900	0.09374
35	0.43337	0.32552	0.16283	0.11361
40	0.48843	0.37215	0.19042	0.14525
45	0.52456	0.41845	0.22617	0.16654
50	0.56510	0.45457	0.25869	0.20064
55	0.60922	0.49850	0.29201	0.22567
60	0.64467	0.54020	0.33350	0.25872
65	0.67457	0.57135	0.36105	0.29064
70	0.70685	0.60738	0.39782	0.31980

対立仮説 K_3 における検出力

t	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$
30	0.16287	0.09148	0.02261	0.01254
35	0.17212	0.09677	0.02495	0.01359
40	0.18422	0.10342	0.02683	0.01516
45	0.19212	0.11060	0.02911	0.01615
50	0.20111	0.11592	0.03125	0.01769
55	0.21210	0.12280	0.03330	0.01881
60	0.22170	0.13002	0.03602	0.02023
65	0.22961	0.13527	0.03778	0.02168
70	0.23900	0.14173	0.04016	0.02292

対立仮説 K_4 における検出力

t	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$
30	0.16442	0.09025	0.02125	0.01150
35	0.17224	0.09452	0.02295	0.01224
40	0.18243	0.09975	0.02430	0.01332
45	0.18887	0.10533	0.02589	0.01398
50	0.19606	0.10937	0.02737	0.01501
55	0.20483	0.11452	0.02875	0.01574
60	0.21244	0.11990	0.03057	0.01665
65	0.21854	0.12374	0.03172	0.01757
70	0.22576	0.12842	0.03326	0.01834

対立仮説 K_5 における検出力

t	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$
30	0.35889	0.24549	0.08670	0.05656
35	0.39952	0.27376	0.10644	0.06683
40	0.45152	0.31099	0.12282	0.08329
45	0.48293	0.35017	0.14408	0.09428
50	0.51985	0.37923	0.16424	0.11239
55	0.56351	0.41740	0.18474	0.12593
60	0.59809	0.45566	0.21208	0.14405
65	0.62588	0.48248	0.22999	0.16252
70	0.65860	0.51611	0.25509	0.17930

対立仮説 K_6 における検出力

t	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$
30	0.50989	0.38214	0.16720	0.12060
35	0.56570	0.42625	0.20952	0.14543
40	0.63246	0.48293	0.24365	0.18474
45	0.66974	0.53849	0.28754	0.21088
50	0.71232	0.57854	0.32705	0.25264
55	0.75909	0.62839	0.36694	0.28289
60	0.79278	0.67437	0.41665	0.32264
65	0.81849	0.70528	0.44838	0.36067
70	0.84703	0.74205	0.49100	0.39489

対立仮説 K_7 における検出力

t	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$
30	0.81536	0.70887	0.41467	0.33409
35	0.87203	0.76469	0.51078	0.39865
40	0.92510	0.83199	0.57862	0.49360
45	0.94354	0.88249	0.65963	0.54998
50	0.96371	0.91136	0.72058	0.63328
55	0.98013	0.94240	0.77603	0.68428
60	0.98704	0.96260	0.83450	0.74642
65	0.99078	0.97247	0.86310	0.79542
70	0.99417	0.98274	0.89893	0.83402

対立仮説 K_8 における検出力

t	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$
30	0.13873	0.07611	0.01827	0.01004
35	0.14481	0.07966	0.01993	0.01080
40	0.15274	0.08418	0.02128	0.01195
45	0.15805	0.08907	0.02294	0.01269
50	0.16415	0.09277	0.02451	0.01385
55	0.17155	0.09756	0.02604	0.01471
60	0.17809	0.10259	0.02807	0.01580
65	0.18361	0.10632	0.02939	0.01692
70	0.19014	0.11092	0.03120	0.01789

表 4.6 $n=5$ における近似マックス検定の検出力

対立仮説 K_1 における検出力

t	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$
80	0.19787	0.12354	0.04078	0.02526
85	0.20673	0.12819	0.04328	0.02747
90	0.21183	0.13330	0.04641	0.03012
95	0.21953	0.14025	0.05030	0.03167
100	0.22966	0.14687	0.05268	0.03367
105	0.23442	0.15154	0.05552	0.03621
110	0.24207	0.15828	0.05924	0.03936
115	0.25266	0.16625	0.06334	0.04107
120	0.25737	0.17063	0.06586	0.04341

対立仮説 K_2 における検出力

t	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$
80	0.48553	0.38567	0.20929	0.15687
85	0.51445	0.40543	0.22564	0.17416
90	0.53109	0.42556	0.24553	0.19481
95	0.55390	0.45158	0.26987	0.20729
100	0.58293	0.47647	0.28518	0.22250
105	0.59703	0.49347	0.30236	0.24114
110	0.61713	0.51628	0.32393	0.26409
115	0.64381	0.54270	0.34767	0.27701
120	0.65617	0.55729	0.36226	0.29332

対立仮説 K_3 における検出力

t	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$
80	0.24809	0.15550	0.04860	0.02902
85	0.26040	0.16120	0.05135	0.03131
90	0.26664	0.16764	0.05480	0.03400
95	0.27711	0.17666	0.05904	0.03552
100	0.29120	0.18498	0.06151	0.03752
105	0.29657	0.19054	0.06454	0.04006
110	0.30669	0.19910	0.06852	0.04317
115	0.32127	0.20919	0.07285	0.04479
120	0.32631	0.21413	0.07540	0.04706

対立仮説 K_4 における検出力

t	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$
80	0.13843	0.07283	0.01595	0.00826
85	0.14042	0.07351	0.01618	0.00842
90	0.14135	0.07433	0.01645	0.00859
95	0.14308	0.07545	0.01676	0.00868
100	0.14527	0.07640	0.01693	0.00880
105	0.14597	0.07703	0.01714	0.00895
110	0.14756	0.07803	0.01741	0.00911
115	0.14973	0.07912	0.01768	0.00920
120	0.15035	0.07963	0.01783	0.00931

対立仮説 K_5 における検出力

t	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$
80	0.25413	0.14989	0.04025	0.02253
85	0.26431	0.15381	0.04187	0.02377
90	0.26871	0.15847	0.04388	0.02519
95	0.27738	0.16511	0.04629	0.02596
100	0.28906	0.17091	0.04762	0.02698
105	0.29236	0.17465	0.04930	0.02827
110	0.30051	0.18077	0.05149	0.02980
115	0.31245	0.18780	0.05380	0.03057
120	0.31530	0.19090	0.05512	0.03167

対立仮説 K_6 における検出力

t	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$
80	0.69457	0.56499	0.28938	0.20784
85	0.72870	0.58625	0.31005	0.22989
90	0.73810	0.60811	0.33592	0.25640
95	0.75920	0.64011	0.36819	0.27115
100	0.79105	0.66897	0.38620	0.28984
105	0.79399	0.68336	0.40714	0.31337
110	0.80792	0.70775	0.43469	0.34282
115	0.83299	0.73772	0.46508	0.35754
120	0.83181	0.74647	0.48108	0.37727

対立仮説 K_7 における検出力

t	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$
80	0.28164	0.17869	0.05731	0.03466
85	0.29576	0.18525	0.06064	0.03749
90	0.30261	0.19267	0.06482	0.04084
95	0.31451	0.20310	0.06996	0.04273
100	0.33059	0.21267	0.07296	0.04523
105	0.33629	0.21900	0.07664	0.04838
110	0.34763	0.22882	0.08147	0.05227
115	0.36412	0.24039	0.08673	0.05431
120	0.36935	0.24594	0.08985	0.05716

表 4.7 $n=10$ における近似マックス検定の検出力

対立仮説 K_1 における検出力

t	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$
130	0.19545	0.12004	0.04001	0.02539
135	0.19909	0.12425	0.04272	0.02648
140	0.20406	0.12713	0.04360	0.02790
145	0.20861	0.13186	0.04649	0.02916
150	0.21286	0.13442	0.04736	0.03057
155	0.21849	0.13979	0.05039	0.03197
160	0.22190	0.14193	0.05130	0.03340
165	0.22879	0.14808	0.05441	0.03491
170	0.23123	0.14968	0.05542	0.03640

対立仮説 K_2 における検出力

t	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$
130	0.50573	0.40045	0.22740	0.17783
135	0.51802	0.41802	0.24636	0.18791
140	0.53523	0.43112	0.25305	0.19969
145	0.54951	0.44996	0.27268	0.21100
150	0.56383	0.46125	0.27921	0.22251
155	0.58040	0.48170	0.29910	0.23469
160	0.59160	0.49082	0.30571	0.24611
165	0.61073	0.51319	0.32549	0.25882
170	0.61859	0.51982	0.33243	0.27034

対立仮説 K_3 における検出力

t	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$
130	0.27429	0.17448	0.05923	0.03719
135	0.28010	0.18155	0.06338	0.03874
140	0.28828	0.18596	0.06461	0.04079
145	0.29576	0.19389	0.06902	0.04257
150	0.30242	0.19765	0.07022	0.04460
155	0.31189	0.20667	0.07480	0.04656
160	0.31680	0.20959	0.07604	0.04861
165	0.32857	0.21992	0.08071	0.05072
170	0.33151	0.22182	0.08208	0.05283

対立仮説 K_4 における検出力

t	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$
130	0.12703	0.06557	0.01398	0.00718
135	0.12758	0.06606	0.01413	0.00722
140	0.12824	0.06631	0.01417	0.00728
145	0.12895	0.06683	0.01432	0.00732
150	0.12943	0.06703	0.01435	0.00738
155	0.13032	0.06760	0.01450	0.00742
160	0.13063	0.06773	0.01453	0.00748
165	0.13169	0.06835	0.01467	0.00752
170	0.13183	0.06844	0.01471	0.00757

対立仮説 K_5 における検出力

t	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$
130	0.20131	0.11143	0.02727	0.01482
135	0.20368	0.11384	0.02813	0.01507
140	0.20668	0.11504	0.02835	0.01543
145	0.20985	0.11767	0.02923	0.01571
150	0.21204	0.11862	0.02944	0.01605
155	0.21609	0.12153	0.03032	0.01634
160	0.21745	0.12220	0.03053	0.01667
165	0.22245	0.12544	0.03138	0.01697
170	0.22297	0.12580	0.03161	0.01729

対立仮説 K_6 における検出力

t	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$
130	0.80620	0.80195	0.60764	0.51331
135	0.79445	0.81297	0.64654	0.53523
140	0.79004	0.81554	0.65303	0.55997
145	0.77840	0.82480	0.68974	0.58316
150	0.76695	0.82160	0.69426	0.60487
155	0.75503	0.82933	0.72774	0.62807
160	0.73780	0.82076	0.73092	0.64729
165	0.72500	0.82694	0.76046	0.66946
170	0.70329	0.81357	0.76281	0.68668

対立仮説 K_7 における検出力

t	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$
130	0.67460	0.53638	0.26631	0.19175
135	0.68081	0.55776	0.28854	0.20135
140	0.69626	0.56868	0.29387	0.21361
145	0.70639	0.59204	0.31711	0.22461
150	0.71454	0.59902	0.32194	0.23652
155	0.72919	0.62506	0.34562	0.24855
160	0.72964	0.62742	0.35034	0.26033
165	0.74930	0.65676	0.37394	0.27303
170	0.74174	0.65390	0.37895	0.28493

表 4.8 $n=15$ における近似マックス検定の検出力

対立仮説 K_1 における検出力

t	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$
180	0.18971	0.11601	0.03845	0.02441
185	0.19382	0.12023	0.04002	0.02500
190	0.19539	0.12114	0.04129	0.02639
195	0.19966	0.12385	0.04226	0.02691
200	0.20305	0.12765	0.04436	0.02789
205	0.20508	0.12876	0.04501	0.02919
210	0.20983	0.13203	0.04644	0.02972
215	0.21261	0.13516	0.04837	0.03110
220	0.21502	0.13674	0.04907	0.03195

対立仮説 K_2 における検出力

t	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$
180	0.50505	0.40232	0.23246	0.18355
185	0.51903	0.42092	0.24468	0.18952
190	0.52556	0.42550	0.25385	0.20224
195	0.54053	0.43807	0.26166	0.20707
200	0.55147	0.45382	0.27679	0.21638
205	0.55916	0.45933	0.28168	0.22767
210	0.57451	0.47332	0.29243	0.23287
215	0.58309	0.48560	0.30553	0.24514
220	0.59147	0.49277	0.31104	0.25231

対立仮説 K_3 における検出力

t	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$
180	0.27989	0.18064	0.06342	0.04047
185	0.28771	0.18877	0.06621	0.04143
190	0.28996	0.19004	0.06845	0.04384
195	0.29798	0.19495	0.07008	0.04470
200	0.30414	0.20217	0.07383	0.04634
205	0.30725	0.20377	0.07489	0.04859
210	0.31619	0.20974	0.07735	0.04943
215	0.32092	0.21551	0.08077	0.05178
220	0.32474	0.21798	0.08189	0.05321

対立仮説 K_4 における検出力

t	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$
180	0.12080	0.06193	0.01301	0.00664
185	0.12138	0.06232	0.01307	0.00665
190	0.12144	0.06236	0.01312	0.00669
195	0.12192	0.06255	0.01315	0.00671
200	0.12235	0.06288	0.01323	0.00673
205	0.12246	0.06292	0.01325	0.00677
210	0.12300	0.06316	0.01330	0.00678
215	0.12331	0.06341	0.01337	0.00682
220	0.12346	0.06348	0.01339	0.00684

対立仮説 K_5 における検出力

t	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$
180	0.17460	0.09442	0.02199	0.01170
185	0.17697	0.09615	0.02229	0.01178
190	0.17719	0.09632	0.02256	0.01200
195	0.17923	0.09718	0.02272	0.01208
200	0.18102	0.09868	0.02313	0.01221
205	0.18145	0.09886	0.02324	0.01241
210	0.18377	0.09992	0.02347	0.01247
215	0.18506	0.10109	0.02384	0.01266
220	0.18567	0.10141	0.02394	0.01278

対立仮説 K_6 における検出力

t	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$
180	0.50554	0.70167	0.69722	0.62293
185	0.46980	0.69547	0.71762	0.63241
190	0.43148	0.66902	0.72586	0.66204
195	0.39405	0.65286	0.73126	0.66487
200	0.35108	0.63368	0.75241	0.68177
205	0.31036	0.60706	0.74669	0.70128
210	0.26479	0.58509	0.75512	0.70364
215	0.21832	0.55671	0.76445	0.72403
220	0.17425	0.52896	0.75859	0.72830

対立仮説 K_7 における検出力

t	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.005$
180	0.67231	0.71858	0.51737	0.41708
185	0.66374	0.73967	0.54020	0.42639
190	0.63588	0.72243	0.55436	0.45303
195	0.62668	0.72535	0.56418	0.45884
200	0.60569	0.73377	0.59272	0.47570
205	0.57757	0.71685	0.59390	0.49737
210	0.56312	0.71903	0.60969	0.50295
215	0.53309	0.71468	0.63071	0.52604
220	0.50314	0.69937	0.63201	0.53591

表 4.9 $n=20$ における近似マックス検定の検出力

5 おわりに

本論では, 水準と検出力のシミュレーションによって検定の比較を行った. その結果, 条件付きカイ2乗検定と近似マックス検定は良い水準の精度を達成していた. また, Anscombeの分散安定変換に基づく検定統計量は母数 λ が大きいときには良い水準を達成することが分かった.

また, Anscombeの分散安定変換に基づく検定による検定と, 近似マックス検定の検出力を比較した結果, 一様に高い検出力を示す検定は得られず, これらの検定は対立仮説によって選択しなければないことが分かった. また, 与えられる $T=t$ の値が大きくなると近似マックス検定の検出力が高くなるので, 観測値に応じて検定を選択することも可能である.

しかし, これらの結果はシミュレーションによって得られたものであるため, 今後, 理論的にどちらがよいのか検証していくことが必要である. また本論では, 近似マックス検定の対立仮説 K の下での c.d.f. の近似式として, 第2項目までの近似を用いたが, 標本の大きさ n が大きくなるにつれて, また対立仮説のばらつきが大きくなるにつれてその精度が悪くなっている. より高い精度の検出力を求めるには第3項目までの近似, 第4項目までの近似も必要になってくるが, 標本の大きさ n が大きくなるにつれてよりこれらの近似はパソコンのレベルでは困難であるため, 別の方法の模索の必要性も考えられる. また本論では, Anscombeの分散安定変換に基づく検定と近似マックス検定の2つの検定のみを比較したが, 条件付きカイ2乗検定等の検出力を求めることによって, より良い検定を得られる可能性がある.

参考文献

[A48] Anscombe, F. J. (1948). The transformation of Poisson, binomial and negative-binomial data. *Bimetrika*, **35**, 246-254.

[A03] 赤平昌文 (2003). 統計解析入門. 森北出版.

[BZ02] Brown, L. D. and Zhao, L. H. (2002). A test for the Poisson distribution. *Sankhyā*, **64**, Ser. A, 611-625.

[L81] Levin, B. (1981). A representation for the multinomial cumulative distribution function. *Ann. Statist.*, **9**, 1123-1126.

[TA05] 田中俊彦, 赤平昌文 (2005). Randomized chi-square goodness of fit test and maximum test. 京都大学 数理解析研究所講究録, **1439**, 128-150.

[TF81] 竹内啓, 藤野和建 (1981). 2項分布とポアソン分布. 東京大学出版会.